Répartition du courant dans un conducteur filiforme.

Un conducteur ohmique de conductivité γ, cylindrique d'axe Oz et de rayon R est parcouru par un courant sinusoïdal de pulsation ω de suffisamment basse fréquence pour qu'on puisse se placer dans le cadre des régimes quasi-permanents.

On suppose que la densité de courant s'écrit $j(r)\,\exp(\jmath\,\omega\,t)\,\overrightarrow{e_z}$

Question 1 :
Justifier cette expression puis donner celle du champ électrique.

Le courant est canalisé par le fil et il est donc raisonnable de considérer que les lignes de courant sont parallèles à l'axe. En régime quasi-permanent, l'intensité est conservative, elle ne dépend donc pas ici de z. Il y a donc invariance par translation parallèlement à l'axe Oz et bien sûr par rotation autour de ce même axe. j ne dépend donc ni de z ni de θ mais uniquement de r.

La loi d'Ohm permet d'affirmer que

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{\gamma}\,\overrightarrow{j} = \frac{1}{\gamma}\,j(r)\,\exp(\jmath\,\omega\,t)\,\overrightarrow{e_z}$$

Question 2 :
Justifier que le champ magnétique est orthoradial et donner son expression ; plutôt que d'admettre la formule $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f(r)\overrightarrow{e}_z) = -\mathrm{d}f/\mathrm{d}r\,\overrightarrow{e}_\theta$, on préférera utiliser astucieusement le théorème de* Stokes*, c'est-à-dire ici la loi de* Faraday*.

Pour un point M hors de l'axe, le plan méridien contenant M et l'axe Oz est un plan de symétrie ; le champ magnétique lui est donc perpendiculaire. Il est donc orthoradial. Les invariances par translation et rotation permettent d'affirmer une expression de la forme :

$$\overrightarrow{B} = B(r)\,\exp(\jmath\,\omega\,t)\,\overrightarrow{e_\theta}$$

Pour faire de la physique et non des mathématiques, l'idée est d'appliquer la loi de Faraday $\oint_\Gamma \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_\Sigma \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ à une surface Σ respectant la symétrie de $\overrightarrow{B}$ c'est-à-dire perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$ donc dans un plan méridien et à une courbe Γ respectant celles de $\overrightarrow{E}$ donc avec des côtés soit parallèles, soit perpendiculaires à $\overrightarrow{E}$. On prendra donc comme contour d'intégration un rectangle orienté $ABCD$ avec AB parallèle à Oz, de même sens, de hauteur arbitraire h, situé à une distance r de Oz ; C et D seront les projections respectives de B et A sur l'axe selon la figure ...que je vous laisse le soin de faire.

Le calcul de la circulation est de routine, je n'en donne que le résultat pour sortir le lecteur de sa passivité et l'obliger à prendre papier et crayon, je suis comme ça.

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = h\,E(r) + 0 - h\,E(0) + 0 = \frac{h}{\gamma}\,[j(r) - j(0)]$$

Pour calculer le flux magnétique, l'on découpe le rectangle en petits rectangles élémentaires de hauteur h avec des côtés à la distance ρ et $\rho + \mathrm{d}\rho$ de l'axe, d'où :

$$\iint_\Sigma \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \int_0^r B(\rho)\,h\,\mathrm{d}\rho = h\int_0^r B(\rho)\,\mathrm{d}\rho$$

La dérivation temporelle se résume, en régime sinusoïdal et en notation complexe, à une multiplication par $\jmath\,\omega$ et la loi de Faraday conduit donc, après simplification par h, à :

$$-\jmath\,\omega\int_0^r B(\rho)\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{\gamma}\,[j(r) - j(0)]$$

$$\int_0^r B(\rho)\,\mathrm{d}\rho = \frac{\jmath}{\gamma\,\omega}\,[j(r) - j(0)]$$

On obtient l'expression de $B(r)$ en dérivant par rapport à r, borne supérieure de l'intégrale, soit

$$B(r) = \frac{\jmath}{\gamma\,\omega}\,\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}r}$$

Question 3 :

Montrer enfin que $j(r)$ vérifie une équation différentielle d'ordre 2 ; plutôt que d'admettre la formule $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f(r)\overrightarrow{e}_\theta) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r.f(r))\overrightarrow{e}_z$, on préférera utiliser astucieusement le théorème de* Stokes*, c'est-à-dire ici le théorème d'* Ampère*.

L'idée est d'appliquer le théorème d'Ampère $\oint_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0\,I_{\text{enlacée}} = \mu_0 \iint_\Sigma \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ à une surface Σ respectant la symétrie de $\overrightarrow{E}$ c'est-à-dire perpendiculaire à $\overrightarrow{E}$ donc dans un plan perpendiculaire à l'axe et à une courbe Γ respectant celles de $\overrightarrow{B}$ donc orthoradiale. On prendra donc comme contour d'intégration un cercle d'axe Oz et de rayon r.

Le calcul de la circulation est de routine

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = 2\,\pi\,r\,B(r)$$

Pour calculer l'intensité enlacée, l'on découpe le disque en petites couronnes élémentaires de rayon ρ et $\rho + \mathrm{d}\rho$, d'où :

$$\iint_\Sigma \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \int_0^r j(\rho)\,2\,\pi\,\rho\,\mathrm{d}\rho$$

Le théorème d'Ampère puis, après simplification par $2\,\pi$, la dérivation par rapport à la borne supérieure r de l'intégrale conduisent à :

$$\mu_0 \int_0^r j(\rho)\,2\,\pi\,\rho\,\mathrm{d}\rho = 2\,\pi\,r\,B(r)$$

$$\mu_0 \int_0^r j(\rho)\,\rho\,\mathrm{d}\rho = r\,B(r)$$

$$\mu_0\,j(r)\,r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r\,B(r)]$$

$$j(r) = \frac{1}{\mu_0\,r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r\,B(r)] = \frac{1}{\mu_0\,r}\left[B(r) + r\,\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}r}\right] = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{r}\,B(r) + \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}r}\right]$$

On y reporte $B(r) = \frac{\jmath}{\gamma\,\omega}\,\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}r}$ et l'on obtient l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients non constants :

$$j(r) = \frac{\jmath}{\mu_0\,\gamma\,\omega}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}^2 j}{\mathrm{d}r^2}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 j}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}r} + \jmath\,\mu_0\,\gamma\,\omega\,j(r) = 0$$

$$j''(r) + \frac{1}{r}\,j'(r) + \jmath\,\alpha\,j(r) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \mu_0\,\gamma\,\omega$$

Question 4 :
On cherchera à résoudre cette équation sous la forme $f(r) = \sum_0^\infty a_n\, r^n$ ***(la solution est une fonction de* Bessel*). Commenter le résultat à la fréquence du secteur.***

Ce type d'équation revient de façon récurrente en physique dès que l'on aborde un problème à symétrie de révolution. Ces solutions sont des fonctions de Bessel et il existe une abondante littérature sur ce sujet. Par ailleurs, quand un physicien est perplexe devant une équation différentielle, il lui est loisible de s'adresser à un mathématicien : ce sont gens affables et toujours prêts à rendre service. Est-ce à dire qu'il est inutile d'avoir des compétences en équations différentielles en particulier et en mathématiques en général ? Je ne le pense pas.

Il me paraît essentiel de savoir qu'une équation linéaire d'ordre deux a pour solutions un espace vectoriel de dimension deux et que, dès lors, connaître deux solutions indépendantes permet de construire toutes les autres.

Il me semble aussi utile de savoir rechercher une solution sous forme de série entière car celle-ci se prête admirablement à un calcul numérique dans n'importe quel langage de programmation.

Donc, je cherche

$$j(r) = a_0 + a_1\, r + a_2\, r^2 + \cdots + a_n\, r^n + \cdots$$

On en tire

$$j'(r) = a_1 + 2\, a_2\, r + \cdots + n\, a_n\, r^{n-1} + \cdots$$

$$j''(r) = 2\, a_2 + \cdots + n\,(n-1)\, a_n\, r^{n-2} + \cdots$$

$$j''(r) + \frac{1}{r}\, j'(r) = \frac{a_1}{r} + 4\, a_2 + \cdots + n^2\, a_n\, r^{n-2} + \cdots$$

L'identification terme à terme avec $-\jmath\,\alpha\, j(r)$ conduit à

$$a_1 = 0 \qquad \forall n \geqslant 2 \quad n^2\, a_n = -\jmath\,\alpha\; a_{n-2}$$

La récurrence relie les termes de 2 en 2 ; a_1 est nul donc tous les termes impairs. La solution normalisée par $a_0 = 1$ a pour coefficients pairs

$$a_{2\,p} = \frac{(-\jmath\,\alpha)^p}{2^2\, 4^2\, 6^2 \cdots (2\,p)^2} = \frac{(-\jmath\,\alpha)^p}{2^{2\,p}\,(p!)^2}$$

$$\text{d'où la fonction} \qquad F(r) = \sum_0^\infty \frac{1}{(p!)^2}\left(\frac{-\jmath\,\alpha\, r^2}{4}\right)^p$$

On peut montrer (mais là, il vaut mieux faire appel à un ami) qu'il existe une autre solution $G(r)$ qui *diverge* en $r = 0$. j(r) est de la forme $\lambda\, F(r) + \mu\, G(r)$. Comme $j(0)$ est fini, il faut que μ soit nul ; comment calculer λ ? Tout simplement en fonction de l'intensité $\underline{I}\ \exp(\jmath\,\omega\, t)$: comme à la question 3, l'on a

$$\underline{I} = \int_0^R j(\rho)\, 2\,\pi\,\rho\,\mathrm{d}\rho = \lambda \int_0^R F(\rho)\, 2\,\pi\,\rho\,\mathrm{d}\rho$$

La série entière s'intègre terme à terme et le résultat se présentera sous forme d'une série entière en R qui se prêtera à un calcul informatisé.

A la fréquence du secteur (50 Hz) pour un fil de cuivre d'environ 1 mm de rayon, on a

$$\mu_0 = 4\,\pi\, 10^{-7} \sim 10^{-6}$$

$$\gamma = 6,7\,10^7\,\mathrm{Si}\cdot\mathrm{m}^{-1} \sim 10^8$$
$$\omega = 100\,\pi \sim 10^2$$
$$r = 1\,\mathrm{mm} \sim 10^{-3}$$
$$\alpha\,R^2/4 \sim 10^{-2} \ll 1$$

On peut donc limiter le développement en série à ses deux premiers termes, on a par exemple

$$j(0) = \lambda \qquad \text{et} \qquad j(R) \approx \lambda\,\left(1 - \jmath\,\alpha\,R^2/4\right)$$

$$|j(R)|/|j(0)| = |1 - \jmath\,\alpha\,R^2/4| = \sqrt{1 + (\alpha\,R^2/4)^2} \approx 1 + \alpha^2\,R^4/32$$

C'est dire que j est uniforme à mieux que 10^{-4} près.